Examen Blanc N° 2 Pour Obtenir Diplôme Du Baccalauréat 2021 Ville ZAIO

Matière	**Mathématiques**	Coeffici	9
Filière	**Science mathématiques (A) et (B)**	Durée	4

بسم الله الرحمن الرحيم

- La durée de l'épreuve est de **4 heures** ;
- l'épreuve comporte **(6) pages** numérotées de 1/6 à 6/6 ;
- l'épreuve est composée de **cinq exercices** indépendants entre eux ;
- le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient.

L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

- **Exercice 1** qui concerne **Arithmétique**........................... **03,00 points**
- **Exercice 2** qui concerne **Structures algébrique**............ **03,00 points**
- **Exercice 3** qui concerne **les nombres complexes**.......... **04,00 points**
- **Exercice 4** qui concerne **Analyse** .... **03,00 points**
- **Exercice 5** qui concerne **Analyse** .... **10,00 points**

Tu choisis de traiter Exercice 1 ou bien Exercice 2 pour les Exercice 3, 4 et 5 est obligatoire

L'usage de la calculatrice est strictement interdit

N.B: toute réponse non justifiée ou non détaillée sera considérée comme fausse

Réalisé par : Prof Abdelali TAJJIOU

Exercice 1 : (3,00 points)

Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$u_n = 1 + 11 + 11^2 + 11^3 + \cdots + 11^{n-1}$$

0.50 **1.** Vérifier que $u_{2021} - 11 \times u_{2020} = 1$, puis en déduire que : $u_{2021} \wedge 11 = 1$.

0.25 **2.** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $10 \times u_n = 11^n - 1$.

3. On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation suivante : (E): $11x \equiv 1[u_{2021}]$ et soit x une solution de (E).

0.50 **a.** Montrer que : $x \equiv 11^{2020}[u_{2021}]$.

0.25 **b.** Déduire que l'ensemble de solution (E) est : $S = \{11^{2020} + u_{2021}k \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$.

0.25 **4. a.** Montrer que le nombre 2017 est premier.

0.50 **b.** En utilisant le théorème de **FERMAT** montrer que pour tout nombre premier $p \geq 7$, on a : $u_p \equiv 1[p]$.

0.25 **c. Sachant que :** $1 + 11 + 11^2 + 11^3 + 11^4 = 7 \times 2017 + 1986$, déduire le reste de la division euclidienne du nombre u_{2021} par 2017.

0.50 **5.** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation suivante : $11^{2021}x - 5y = 2$.

Exercice 2 : (3,00 points)

Soit φ l'application définie de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$.

On définit sur l'ensemble $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ la loi de composition interne $*$ par :

$$\forall (a,b) \in E,\ \forall (c,d) \in E : (a,b) * (c,d) = (ac,\ bc + \varphi(a)d).$$

0.50 **1.** Montrer que :
la loi $*$ est associative si et seulement si $\forall a,c \in \mathbb{R}^*$; $\varphi(ac) = \varphi(a)\varphi(c)$

0.50 **2. a.** Montrer que si $\varphi(1) = 1$, alors la loi $*$ admet un élément neutre que l'on déterminera.

0.50 **b.** Inversement, si la loi $*$ admet un élément neutre, est-ce que $\varphi(1) = 1$?

1.00 **3. On suppose que l'application φ vérifie :**

$$\begin{cases} \forall a,c \in \mathbb{R}^*;\ \varphi(ac) = \varphi(a)\varphi(c) \\ \varphi(1) = 1 \end{cases}$$

Montrer que tout élément $(a,b) \in E$ admet un symétrique pour la loi $*$ que l'on déterminera. **Est-ce que $(E,*)$ est un groupe ?**

4. On considère l'ensemble :

$$F=\left\{M(x,y)=\begin{pmatrix}\varphi(x) & y\\ 0 & x\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})\ /\ \ (x,y)\in E\right\}$$

Soit φ l'application définie de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall a,c\in\mathbb{R}^*;\ \varphi(ac)=\varphi(a)\varphi(c).$$

0.25 **a.** Montrer que :

$$\forall (x,y),(x',y')\in E\ :\ M(x,y)\times M(x',y')=M\big((x,y)*(x',y')\big).$$

0.25 **b.** Montrer que $(F,\times)$ est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$.

Exercice 3 : (4,00 points)

Partie I: On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue z définie par :

$$(E_m): z^2-(1+2m+im)z+2m(1+im)=0 \quad \text{tel que } m\in\mathbb{C}.$$

0.50 **1.** Vérifier que $\Delta=(1-2m+im)^2$ est le discriminant de l'équation (E_m).

0.50 **2.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m).

Partie II:

Dans le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère : A, B et M les points d'affixes respectives $-i$, $b=\dfrac{2m}{1+im}$ et m tel que $m\in\mathbb{C}-\{i\}$.

0.50 **1. a.** Montrer que : $b\in\mathbb{R}\Leftrightarrow |m|^2=\operatorname{Im}(m)$.

0.25 **b.** En déduire l'ensemble des points $M(m)$ pour b est réel.

0.25 **2. a.** Montrer que les points O, A et M sont alignés si et seulement si $m\in i\mathbb{R}$.

0.25 **b.** Montrer que si $m\neq 0$ alors $\dfrac{b+i}{b}=\dfrac{m+i}{2m}$.

0.50 **c.** En déduire que si $m\notin i\mathbb{R}$ alors les points O, A, B et M sont cocycliques.

3. On suppose que : $m\in\mathbb{R}^*$. Soit F_M l'application définie de $P-\{O\}$ dans P, et qui associe à chaque point $M'(z')$ le point $M''(z'')$ tel que $z''=(1+im)z'$.

0.50 **a.** Déterminer l'ensemble des points $M(m)$ pour que l'application F_M soit une rotation.

0.25 **b.** Montrer que les droites (OM') et $(M'M'')$ sont perpendiculaires.

0.50 **c.** Déduire que : $1+im=\sqrt{1+m^2}\,e^{i\times Arc\tan(m)}$.

Exercice 4 : (3,00 points)

1. Soit f une fonction définie, continue et décroissante sur $]0;1]$.

On considère la fonction F définie sur $]0;1]$ par : $F(x)=\int_x^1 f(t)\,dt$

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*);\ u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

0.50 **a.** Montrer que pour tout entier $n\geq 2$ et pour tout k de $\{1,\ldots,n-1\}$, on a :

$$\left(\forall t\in\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]\right);\quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right)\leq \sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

0.25 **b.** Vérifier que : $(\forall n\geq 2);\ F\left(\frac{1}{n}\right)=\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,dt=\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt.$

0.50 **c.** Montrer que :

$$(\forall n\geq 2);\ F\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}f(1)\leq u_n\leq F\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right).$$

0.25 **d. On suppose que :** $\lim_{x\to 0^+} F(x)=\ell\ (\ell\in\mathbb{R})$ et $\lim_{x\to 0^+} x\,f(x)=0.$

En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

2. Dans cette question, on suppose que f une fonction continue et croissante sur $[0;\pi]$.

0.50 **a.** Montrer que pour tout entier $n\geq 1$ et pour tout k de $\{0,1,\ldots,n-1\}$, on a :

$$\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} |\sin(nx)|\,dx=\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} (-1)^k\sin(nx)\,dx=\frac{2}{n}.$$

0.50 **b.** Montrer que pour tout entier $n\geq 1$ et pour tout k de $\{0,1,\ldots,n-1\}$, on a :

$$\frac{2}{n}f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\leq \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} f(x)|\sin(nx)|\,dx\leq \frac{2}{n}f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right).$$

0.25 **c.** En déduire un encadrement de $\int_0^{\pi} f(x)|\sin(nx)|\,dx.$

0.25 **d.** Déduire que : $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} f(x)|\sin(nx)|\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx.$

Exercice 5 : (10,00 points)

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$f(x)=(x+1)e^{-x}$$

Partie I:

0.50 **1. a.** Montrer que :

$$\left(\forall x\in\mathbb{R}^{+}\right)\left(\exists c_x\in\left]x,2x\right[\right);\ f(2x)-f(x)=-xc_xe^{-c_x}.$$

0.25 **b.** En déduire que : $\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right);\ f(2x)-f(x)<0.$

0.50 **2.** Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(2x)-f(x)=0.$

Partie II:

On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$F(x)=\int_x^{2x}\frac{1}{1+te^{-t}}\,dt$$

Soit (C_F) la courbe représentant F dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

0.50 **1. a.** Vérifier que : $\left(\forall x\in[0;1]\right);\ 1-x\le\dfrac{1}{1+x}\le1-\dfrac{x}{2}.$

0.50 **b.** Déduire que : $\left(\forall t\in[0,+\infty[\right);\ 1-te^{-t}\le\dfrac{1}{1+te^{-t}}\le1-\dfrac{te^{-t}}{2}.$

0.50 **c.** Montrer que :

$$\left(\forall x\in\mathbb{R}^{+}\right);\ x+f(2x)-f(x)\le F(x)\le x+\frac{1}{2}\left(f(2x)-f(x)\right).$$

0.50 **d.** En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$, puis que la droite d'équation $(\Delta): y=x$ est asymptote à (C_F) au voisinage de $+\infty$.

0.25 **e.** Etudier la position relative de la courbe (C_F) et la droite (Δ) sur $]0,+\infty[$.

0.50 **2.** Montrer que F est dérivable à droite en 0 et déterminer $F'_d(0)$.

0.75 **3. a.** Montrer que la fonction F est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que :

$$\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right);\ F'(x)=\frac{e^{2x}+2x\left(e^{x}-1\right)}{\left(e^{2x}+2x\right)\left(1+xe^{-x}\right)}.$$

0.25 **b.** Donner le tableau de variation de F.

0.50 **4.** Tracer la courbe (C_F). (On prend : $\|\vec{i}\| = 1\ cm$).

0.75 **5.** Soit S l'aire du domaine plan délimité par (C_F), la droite (Δ) et les deux droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

▷▶ Montrer que : $0 \le S \le \frac{1}{4}$.

Partie III:

Soit n un entier naturel non nul.

0.50 **1. a.** Montrer que : $(\exists \alpha_n \in [0,+\infty[)$; $\int_{\alpha_n}^{2\alpha_n} \frac{1}{1+te^{-t}} dt = e^{-n}$.

0.75 **b.** Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\ge1}$ est décroissante, puis déduire qu'elle est convergente.

0.50 **c.** Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.

2. Soit $(u_n)_{n\ge1}$ une suite numérique définie par : $u_n = \int_0^{\alpha_n} F(t)\,dt$.

0.50 **a.** Montrer que : $(\exists \beta_n \in]0,\alpha_n[)$; $u_n = \alpha_n F(\beta_n)$.

0.50 **b.** Montrer que la suite $(u_n)_{n\ge1}$ est décroissante, puis déduire qu'elle est convergente et déterminer sa limite.

3. On considère la suite numérique $(v_n)_{n\ge1}$ définie par :

$$v_n = n\left(F\left(u_n + \frac{2}{n}\right) - F\left(u_n + \frac{1}{n}\right)\right).$$

0.50 **a.** En appliquant le théorème des accroissements finies, montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\left(\exists \lambda_n \in \left]u_n + \frac{1}{n}; u_n + \frac{2}{n}\right[\right);\ v_n = \frac{e^{2\lambda_n} + 2\lambda_n\left(e^{\lambda_n} - 1\right)}{\left(e^{2\lambda_n} + 2\lambda_n\right)\left(1 + \lambda_n e^{-\lambda_n}\right)}.$$

0.50 **b.** En déduire que la suite $(v_n)_{n\ge1}$ est convergente et déterminer sa limite.

Fin du sujet

bonne chance !

25/04/2021